Desigualdades (I)

Conceptos básicos sobre desigualdades

Hay varias desigualdades que son casi "de sentido común", pero que conviene tener en cuenta porque pueden ser útiles a la hora de resolver desigualdades más complicadas. Algunas de ellas son las siguientes:

- Si $x>1$, entonces $x^n>x^m$ para cualesquiera exponentes $n>m$.
- Si $x<1$, entonces $x^n<x^m$ para cualesquiera exponentes $n>m$.
- $x^2\geq 0$ para cualquier real x, con igualdad si y sólo si $x=0$.
- Si $a\geq b$, entonces $ac\geq bc$ si c es positivo, $ac\leq bc$ si c es negativo.
- Si $a\geq b$ y $c\geq d$, entonces $a+c\geq b+d$ con igualdad si y sólo si $a=b$ y $c=d$, y si todos los números son positivos, $ac\geq bd$, con igualdad nuevamente si y sólo si $a=b$ y $c=d$ (caso de que no todos los números sean positivos, no podemos decir nada a priori en la segunda desigualdad, habría que estudiar cada caso particular).

Un detalle a tener en cuenta al trabajar con desigualdades es que, cuando nos piden demostrar una desigualdad, no sólo tenemos que demostrar que es cierta; una pregunta implícita es hallar todos los casos en los que se da la igualdad (cuando ésta es posible), y si no respondemos a esta pregunta, se puede entender que "falta algo" para acabar de completar el problema; en Olimpiadas, ¡esto suele resultar en que se pierden puntos! El caso de igualdad es también muy importante, porque hay muchos problemas en los que se pide resolver una ecuación, que pueden resolverse convirtiendo la ecuación en desigualdad, y demostrando que la igualdad sólo se puede dar bajo ciertas condiciones, que serían entonces la solución de la ecuación.

Algunas desigualdades clásicas

Introduciremos algunas desigualdades clásicas, demostrándolas para ilustrar cómo se puede trabajar con desigualdades. Las desigualdades que se mencionan a continuación, podrán ser utilizadas sin más que decir su nombre, ya que son bastante conocidas.

Desigualdad del producto escalar, también llamada desigualdad de Cauchy-Schwarz

Sean $a_1,a_2,...,a_n$ y $b_1,b_2,...,b_n$ dos secuencias de n números reales cada una. Entonces,

$$\left|a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n\right|\leq\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+...+a_n^{\,2}}\sqrt{b_1^{\,2}+b_2^{\,2}+...+b_n^{\,2}}\ .$$

Si elevamos ambos miembros al cuadrado y restamos de ambos lo que nos quede a la izquierda de la desigualdad, vemos que todos los posibles términos de la forma $a_i^2b_i^2$, donde i toma todos los valores enteros entre 1 y n inclusive, aparecen en ambos miembros de la desigualdad, con lo que se cancelarían. Quedan entonces, cero en el miembro de la izquierda, y en el miembro de la derecha, con signo negativo todos los posibles términos de la forma $2a_ia_jb_ib_j$, donde i,j son enteros distintos entre 1 y n, y con signo positivo todos los términos de la forma $a_u^2b_v^2$, donde u,v toman son enteros distintos cualesquiera entre 1 y n. Si agrupamos el término con $u=i$ y $v=j$, el término con $u=j$ y $v=i$, con el término $-2a_ia_jb_ib_j$, vemos entonces que en el miembro de la derecha nos quedaría la suma de todos los posibles términos de la forma

$$a_i^{\,2}b_j^{\,2}+a_j^{\,2}b_i^{\,2}-2a_ia_jb_ib_j=\left(a_ib_j-a_jb_i\right)^2,$$

donde (i,j) son todos los posibles pares de enteros distintos entre 1 y n inclusive. Nos queda entonces algo que siempre es cierto: la suma de varios cuadrados es mayor o igual que 0. Como este resultado es equivalente a la desigualdad inicial, entonces la desigualdad inicial es cierta. Ahora bien, como ya hemos dicho antes, es importante saber cuándo se da la igualdad. Claramente, la suma de varios cuadrados será cero cuando todos los cuadrados sean cero, es decir, cuando $a_i b_j = a_j b_i$ para cualesquiera i,j. Esto puede también expresarse de forma alternativa como sigue: se da la igualdad cuando existe una constante ρ tal que

$$\rho = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}.$$

Aquellos que conozcan el concepto de producto escalar de dos vectores, podrán ver que, por ejemplo para $n=2$, si consideramos los vectores de coordenadas (a_1,a_2) y (b_1,b_2), el miembro de la izquierda es el valor absoluto del producto escalar de ambos vectores, mientras que el miembro de la izquierda es el producto de los módulos (longitudes) de ambos vectores. Ahora bien, el coseno del ángulo formado entre dichos vectores es claramente el miembro de la izquierda, dividido entre el miembro de la derecha, y este coseno es, en valor absoluto, menor que 1, siendo 1 si y sólo si los dos vectores son colineales, es decir, si y sólo si están en la misma dirección, en sentidos iguales (coseno de valor 1) u opuestos (coseno de valor -1); este resultado es equivalente a la desigualdad demostrada, de ahí que se le llame del producto escalar. La única diferencia es que, en lugar de considerar sólo vectores en el plano para $n=2$, podemos considerar vectores en el espacio para $n=3$, o para espacios de dimensión mayor que 3 para n mayor que 3.

Desigualdad de Schur

Sean a,b,c tres reales **no negativos** distintos (¡es importante el que ninguno de los tres sea negativo, si no la desigualdad no tiene por qué cumplirse siempre!). Entonces, se cumple siempre que

$$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b) \geq 0.$$

Si los tres números son cero, entonces la desigualdad es claramente cierta, dándose la igualdad, ya que ambos miembros serían iguales a cero. Si exactamente dos de ellos (sin pérdida de generalidad b y c) son cero, entonces la desigualdad se escribiría como $a^3 \geq 0$, claramente cierta, y además estricta, al ser a positivo. Si exactamente uno de ellos (sin pérdida de generalidad c) es nulo, entonces la desigualdad se escribe como

$$0 \leq a^2(a-b)+b^2(b-a) = (a-b)(a^2-b^2) = (a+b)(a-b)^2,$$

claramente cierta ya que $a+b$ es positivo y $(a-b)^2$ es el cuadrado de un real, que es siempre positivo o nulo. Nótese que se da la igualdad en este caso si y sólo si el cuadrado es cero, es decir, si y sólo si $a=b$. Nos queda entonces tan sólo el caso en el que a,b,c son todos positivos, en cuyo caso podemos agrupar el primer y el segundo término, de la siguiente forma:

$$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a) = (a-b)(a^2-ac-b^2+bc) = (a+b-c)(a-b)^2.$$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad (ya que podemos intercambiar cíclicamente las variables sin afectar a la desigualdad, es decir, podemos llamar b a a, c a b y a a c sin que cambie la desigualdad), que c es menor o igual que a y que b, con lo que el término $c(c-a)(c-b)$ no puede ser negativo; en efecto, c es positivo, y $c-a$ y $c-b$, o son ambos negativos con lo que su producto es positivo, o uno de los dos es cero cuando c es igual a a o a b con lo que su producto sería cero. Además, $a+b-c$ es positivo porque $b-c$ es positivo o nulo, y a es positivo, mientras que $(a-b)^2$ es el cuadrado de un número real, con lo que es positivo o nulo, siendo nulo si y sólo si $a=b$. Hemos llegado entonces a que el miembro de la izquierda es la suma de dos términos que son, cada uno, o positivo o nulo, con lo que la desigualdad es cierta. Además, para que se dé la igualdad, ha de cumplirse que $a=b$ para que el primer sumando sea nulo, y que $c=a$ o $c=b$ para que el segundo sumando sea nulo; juntando ambas condiciones, tenemos que se da la igualdad si y sólo si a,b,c son todos iguales.

A la desigualdad que hemos demostrado se le llama desigualdad de Schur de tercer grado o de tercer orden (cada término en el miembro de la izquierda es el producto de tres factores). De forma similar se puede demostrar la desigualdad de Schur de grado n para cada n mayor o igual que 3, que sería una generalización de la que ya hemos visto, y se escribiría:

$$a^{n-2}(a-b)(a-c)+b^{n-2}(b-c)(b-a)+c^{n-2}(c-a)(c-b) \geq 0.$$

Desigualdades entre medias

Dados n números reales no negativos, $a_1,a_2,...,a_n$, se cumple siempre que

$$\max(a_1,a_2,...,a_n) \geq \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \geq$$

$$\geq \sqrt[n]{a_1a_2...a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}} \geq \min(a_1,a_2,...,a_n),$$

donde max y min denotan respectivamente al máximo y al mínimo de los n elementos, al segundo término se le llama media cuadrática, al tercero media aritmética, al cuarto media geométrica y al cuarto media armónica. Con todas estas desigualdades sucede una cosa curiosa: cuando se da la igualdad en una de ellas, ¡se da en todas! Además, esto sucede si y sólo si todos los reales son iguales.

La primera y última desigualdades son bastante sencillas de demostrar; si llamamos M al máximo y m al mínimo de los $a_1,a_2,...,a_n$, tenemos claramente que

$$nM^2 \geq a_1^2+a_2^2+...+a_n^2, \qquad \frac{n}{m} \geq \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n},$$

ya que en el primer caso, el miembro de la derecha tiene n términos, cada uno de los cuáles es menor o igual que M^2, siendo todos ellos iguales si y sólo si los n reales $a_1,a_2,...,a_n$ son iguales a M (y por lo tanto iguales entre sí), mientras que en el segundo caso, el miembro de la derecha tiene n términos, cada uno de ellos menor o igual que $1/m$, siendo siendo todos ellos iguales si y sólo si los n reales $a_1,a_2,...,a_n$ son iguales a m (y por lo tanto nuevamente iguales entre sí).

La segunda desigualdad es consecuencia directa de la desigualdad del producto escalar que ya hemos demostrado; en efecto, si tomamos $b_1=b_2=...=b_n=1$, tenemos que la desigualdad de Cauchy-Schwarz aplicada a $a_1,a_2,...,a_n$ y $b_1,b_2,...,b_n$ resulta en

$$\sqrt{n}\sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2} = \sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+...+b_n^2} \geq |a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n| =$$

$$= |a_1+a_2+...+a_n| = a_1+a_2+...+a_n.$$

Si ahora dividimos ambos miembros entre n, obtenemos la desigualdad entre medias cuadrática y aritmética. Nótese que, de acuerdo a lo ya demostrado, se obtiene la igualdad si y sólo si a_i/b_i es el mismo valor para $i=1,2,...,n$, es decir, como $b_1=b_2=...=b_n=1$, se da la igualdad entre medias aritmética y cuadrática si y sólo si $a_1,a_2,...,a_n$ son todos iguales.

La tercera desigualdad es sencilla de demostrar en el caso $n=2$, es decir, no es complicado demostrar que

$$\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1a_2};$$

en efecto, multiplicando ambos miembros por 2 y restando de ambos miembros lo que nos queda a la derecha, obtenemos la desigualdad equivalente

$$0 \leq a_1+a_2-2\sqrt{a_1a_2} = \left(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}\right)^2,$$

que es claramente cierto siempre por ser el miembro de la derecha el cuadrado de un número real, dándose la igualdad si y sólo si el real es cero, es decir, si y sólo si $a_1=a_2$. Para $n=3$, el resultado es un poco más complicado de demostrar, pero podemos escribir

$$a_1+a_2+a_3-3\sqrt[3]{a_1a_2a_3} = \left(\sqrt[3]{a_1}+\sqrt[3]{a_2}+\sqrt[3]{a_3}\right)\left(\sqrt[3]{a_1^2}+\sqrt[3]{a_2^2}+\sqrt[3]{a_3^2}-\sqrt[3]{a_1a_2}-\sqrt[3]{a_2a_3}-\sqrt[3]{a_3a_1}\right).$$

Ahora bien, el miembro de la derecha es el producto de dos factores, de los cuáles el primero es positivo o nulo, y el segundo es positivo o nulo en virtud de la desigualdad de Cauchy-Schwarz (¿ves por qué?), dándose nuevamente la desigualdad si y sólo si $a_1=a_2=a_3$; esto podemos deducirlo de la condición de igualdad para la desigualdad de Cauchy-Schwarz (¿ves cómo?). Sin embargo, para $n=4$, aplicar ideas similares a las vistas en los casos $n=2$ y $n=3$ empieza a ser más complicado, ¡y no digamos nada cuando n crece mucho! No parece además haber una forma "común" de ordenar los términos para todo n...

Dejaremos esta demostración para más adelante; sin embargo, supongamos que hemos podido demostrar para todo entero n la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica, y que hemos demostrado que para todo entero n, la igualdad se da sólo cuando todos los números reales son iguales entre sí. Entonces, la desigualdad entre las medias geométrica y armónica se demuestra de forma sencilla: aplicamos la desigualdad entre medias aritmética y armónica a los números $1/a_1, 1/a_2, ..., 1/a_n$:

$$\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2}...\frac{1}{a_n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}} .$$

¡Es la desigualdad entre las medias geométrica y armónica aplicada a los números $a_1, a_2, ..., a_n$!